

**NOM :**

**Prénom :**

UNIVERSITE PAUL SABATIER

Contrôle continue de Mécanique Quantique

(Durée 45 mn)

I Système à deux états

1°) On considère un système physique dont l'espace des états est à 2 dimensions. Les vecteurs  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  constituent une base orthonormée de ce système. Un opérateur A est tel que  $A|1\rangle = \alpha|1\rangle + i\beta|2\rangle$  et  $A|2\rangle = -i\beta|1\rangle + \alpha|2\rangle$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles. Ecrire la matrice de cet opérateur.

2°) Déterminer ses valeurs propres et ses états propres normés.

3°) Le système est dans l'état  $|1\rangle$ . Quels sont les résultats de mesure de la grandeur physique A. En déduire la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen.

II Oscillateur harmonique

1°) Donner l'expression du hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension selon l'axe Ox en fonction de la variable x.

2°) On définit les opérateurs  $a$  et  $c$  tels que  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \frac{d}{dX})$  et  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - \frac{d}{dX})$ . Calculer le commutateur  $[a, c]$ . En effectuant un changement de variable de type  $X = \alpha x$ , réécrire le hamiltonien de l'oscillateur en fonction des opérateurs  $a$  et  $c$ . Que vaut la constante  $\alpha$ ?

3°) Montrer que la fonction d'onde  $\varphi_n(X) = Ae^{-X^2/2}$  est fonction propre de  $a$  et donc fonction propre de  $H$ . Quel est le niveau considéré et son énergie ?

4°) Les états propres du hamiltonien  $\varphi_n(X)$  sont notés  $|n\rangle$ . A l'instant  $t = 0$ , un oscillateur est dans un état  $|\psi\rangle = |1\rangle + i|3\rangle$ . Quels sont les résultats possibles pour la mesure de  $E$  ? Quelles sont les probabilités associées à ces mesures ? En déduire la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de  $E$ .

5°) Ecrire la fonction d'onde décrivant cet état à l'instant  $t$ .